Title	A generalization of dual symmetry and reciprocity for symmetric algebras (Research on finite groups, algebraic combinatorics and vertex operator algebras)
Author(s)	櫻井, 太朗
Citation	数理解析研究所講究録 = RIMS Kokyuroku (2017), 2053: 64-67
Issue Date	2017-10
URL	http://hdl.handle.net/2433/237128
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
第2053巻 2017年 64-67

A generalization of dual symmetry and reciprocity for symmetric algebras

千葉大学大学院理学研究科　櫻井太朗
Taro Sakurai
Department of Mathematics and Informatics,
Graduate School of Science,
Chiba University

要約. 有限次元対称多元環の射影直既約加群たちが持つLoewy構造に関する「双対対称性」と「相互律」の一般化が[Sakurai, arXiv:1605.05735]で得られた．本稿ではいくらか一般化された形も含めて，その紹介をする．

1. はじめに

加群論において半単純加群は構造の最もよくわかっている加群である．しかし，もちろん加群は一般に半単純とは限らない．そこで一般の加群を半単純なものへと分解することによって把握する，というのは自然な理解のひとつだろう．そのような分解方法のひとつにLoewy構造がある．

とくに有限群の群多元環（あるいはより一般に有限次元の対称多元環）上の射影加群に関するLoewy構造を実際に決定するときには，射影直既約加群に関する「双対対称性」や「相互律」を利用することが有効であることが知られていた[**2, 3, 7**]．この「双対対称性」や「相互律」を一般の — 対称とは限らない — 有限次元多元環へ拡張することができた（定理4.1）．本稿ではいくらか一般化された形（定理4.3と系4.4）も含めて，その紹介をしたい．

2. 定義と記法

この節では定理を述べるのに必要な定義と記法の準備をする．

E-mail address: `tsakurai@math.s.chiba-u.ac.jp`.
2010 *Mathematics Subject Classification.* 16P10 (16D40, 18G05, 20C05, 20C20).
キーワード．Loewy構造, radical列, socle列, 対称多元環, 射影加群, 中山関手.
`http://orcid.org/0000-0003-0608-1852`.

以下，A を可換 artin 環 R 上の artin 多元環とし，有限生成右 A 加群 V をとる．加群 V の極大部分加群の共通部分を $\operatorname{rad} V$， 極小部分加群の和を $\operatorname{soc} V$，反対多元環を A^{op} で表す．

定義 2.1. 非負整数 n に対して $\operatorname{rad}^n V$ を再帰的に

$$\operatorname{rad}^0 V = V,$$
$$\operatorname{rad}^n V = \operatorname{rad}(\operatorname{rad}^{n-1} V) \qquad (n > 0)$$

で定める．同様に，$\operatorname{soc}^n V$ を

$$\operatorname{soc}^0 V = 0,$$
$$\operatorname{soc}^n V = \{\, v \in V \mid v + \operatorname{soc}^{n-1} V \in \operatorname{soc}(V/\operatorname{soc}^{n-1} V)\,\} \qquad (n > 0)$$

で定め，これらをそれぞれ加群 V の n 番目の *radical* 列, *socle* 列と呼ぶ.

定義 2.2. 正整数 n に対して半単純 A 加群

$$\operatorname{rad}_n V = \operatorname{rad}^{n-1} V/\operatorname{rad}^n V, \quad \operatorname{soc}_n V = \operatorname{soc}^n V/\operatorname{soc}^{n-1} V$$

をそれぞれ加群 V の n 番目の *radical* 商, *socle* 商と呼ぶ.

注意 2.3. 有限生成右 A 加群のなす圏を mod_A と表す．上で定義した $\operatorname{rad}^n, \operatorname{soc}^n, \operatorname{rad}_n, \operatorname{soc}_n$ は自然に mod_A 上の自己関手とみなせるので，そのようにも扱う.

定義 2.4. 圏 mod_R における極小移入余生成素を E とおく．ここで関手 $(-)^\vee$ を $\operatorname{mod}_A(-,A)$ で，$(-)^*$ を $\operatorname{mod}_R(-,E)$ で定める．このとき，これらの合成関手を $\nu(-)$ とおく．これは**中山関手**と呼ばれる.

定義 2.5. Artin 多元環 A はその双対 A^* と両側 A 加群として同型なとき，**対称**という.

3. LANDROCK の補題

主定理を述べる前に，その原型となった *Landrock* の**補題**とその系を紹介する．これら（以下では**双対対称性**と**相互律**と呼ぶことにする）は対称多元環上の射影直既約加群たちの radical 商とそれらの双対の radical 商やそれらの socle 商との間にある関係を述べている.

定理 3.1 (Landrock, [4, Theorem B]). 有限次元対称多元環 A 上の単純加群 S_λ, S_μ とその射影被覆 P_λ, P_μ をとる．このとき正整数 n に対して

$$\operatorname{mod}_A(\operatorname{rad}_n P_\lambda, S_\mu) \cong \operatorname{mod}_{A^{\mathrm{op}}}(\operatorname{rad}_n(P_\mu^*), S_\lambda^*)$$

が成り立つ.

系 3.2. 定理 3.1 と同じ仮定のもとで

$$\operatorname{mod}_A(\operatorname{rad}_n P_\lambda, S_\mu) \cong \operatorname{mod}_A(S_\lambda, \operatorname{soc}_n P_\mu)$$

が成り立つ.

注意 3.3. 有限群の群多元環の場合には簡潔な別証明が [**5**] で与えられている．

4. 主定理

この節では前節で紹介した双対対称性と相互律を係数多元環が対称とは限らない場合へ拡張した結果を紹介する．

定理 4.1 (Sakurai, [**6**, Theorem 1.3])**.** 有限次元多元環 A 上の単純加群 S_λ, S_μ とその射影被覆 P_λ, P_μ をとる．このとき正整数 n に対して

$$\mathrm{mod}_A(\mathrm{rad}_n P_\lambda, S_\mu) \cong \mathrm{mod}_{A^{\mathrm{op}}}(\mathrm{rad}_n(P_\mu^\vee), S_\lambda^*),$$
$$\mathrm{mod}_A(\mathrm{rad}_n P_\lambda, S_\mu) \cong \mathrm{mod}_A(S_\lambda, \mathrm{soc}_n \nu P_\mu)$$

が成り立つ．

注意 4.2. 定理 4.1 から Landrock による定理 3.1 と系 3.2 を導くことができる．実際，artin 多元環が対称ならば $(-)^\vee \cong (-)^*$ であることが知られており [**1**, Proposition IV.3.8]，ここから $\nu \cong \mathrm{id}$ もわかるので，定理 4.1 は確かに前節の結果を拡張している．

定理 4.1 はより一般化された形である次の定理から従う．(有限次元多元環に対して与えた証明をほとんどそのまま流用すればよい；[**6**, (2.1)] 参照．) 以下，proj_A で射影加群からなる mod_A の充満部分圏，inj_A で移入加群からなる mod_A の充満部分圏を表す．

定理 4.3. *Artin* 多元環 A と正整数 n に対して関手の自然同型

$$\mathrm{proj}_A(\mathrm{rad}_n -, \nu ?) \cong \mathrm{proj}_A(-, \mathrm{soc}_n \nu ?)$$

が成り立つ．

系 4.4. *Artin* 多元環 A と正整数 n に対して関手の自然同型

$$\mathrm{inj}_A(\nu^{-1}-, \mathrm{soc}_n ?) \cong \mathrm{inj}_A(\mathrm{rad}_n \nu^{-1}-, ?)$$

が成り立つ．

参考文献

1. M. Auslander, I. Reiten, and S. V. Smalø, *Representation theory of artin algebras*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 36 (Cambridge University Press, Cambridge, 1997).
2. D. Benson, 'The Loewy structure of the projective indecomposable modules for A_8 in characteristic 2', *Comm. Algebra* 11 (1983) 1395–1432, doi:10.1080/00927878308822912.
3. S. Koshitani, 'On the Loewy series of the group algebra of a finite p-solvable group with p-length > 1', *Comm. Algebra* 13 (1985) 2175–2198, doi:10.1080/00927878508823271.

4. P. LANDROCK, 'The Cartan matrix of a group algebra modulo any power of its radical', *Proc. Amer. Math. Soc.* 88 (1983) 205–206, doi:10.1090/S0002-9939-1983-0695241-2.

5. T. OKUYAMA and Y. TSUSHIMA, 'On a conjecture of P. Landrock', *J. Algebra* 104 (1986) 203–208, doi:10.1016/0021-8693(86)90247-4.

6. T. SAKURAI, 'A generalization of dual symmetry and reciprocity for symmetric algebras', Preprint, 2016, arXiv:1605.05735.

7. K. WAKI, 'The Loewy structure of the projective indecomposable modules for the Mathieu groups in characteristic 3', *Comm. Algebra* 21 (1993) 1457–1485, doi:10.1080/00927879308824631.